6. Binomické rozdělení (Bernoulliovo schéma)

Příklady

① Hodíme 7krát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

a) poprvé, potřetí a počtvrté padne 6, v ostatních hodech ne ... A

- pravděp. hodu šestky je $\frac{1}{6}$; pravděpodobnost, že 6 nepadne je $\frac{5}{6}$
- výsledky v jednotlivých hodech jsou nezávislé =>

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

b) čtyřikrát šestka nepadne a poslední 3 hody ano ... B

$$P(B) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

c) šestka padne právě třikrát ... C [ozn. P... padne 6, N... nepadne 6]

$$C = \{(PPPNNNN) \cup (PPNPNNN) \cup (PNPPNNN) \cup \ldots \cup (NNNNPPP)\}$$

pravděpodobnosti všech jevů jsou stejné, pro každého jevu je $\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$,
ALE KOLIK JICH JE

- je jich tolik, kolika způsoby lze vybrat 3 prvky (P) ze 7 (příp. 4 prvky (N) ze 7), tj. $\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$ $\left[\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35\right]$
- proto $P(C) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{35}) = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4}_{35\text{krát, tj. } \binom{7}{3}\text{krát}}$

$$P(C) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Výsledek lze zobecnit – místo padnutí šestky s pravděpodobností jedna šestina lze uvažovat libovolný jev s pravděpodobností p, místo 7 opakování lze uvažovat n opakování, místo 3 úspěchů k úspěchů

Bernoulliovo schéma (binomické rozdělení)

[popisuje pravděpodobnost počtu úspěchů (zdarů) v sérii nezávislých pokusů s dvěma možnými výsledky (úspěch, neúspěch se stejnou pravděpodobností)]

Uvažujme n nezávislých pokusů, z nichž každý má jen 2 možné výsledky
– úspěch (zdar) s pravděpodobností p
– neúspěch (nezdar) s pravděpodobností q ($q = 1 - p$),
jejich pravděpodobnosti jsou ve všech pokusech stejné.

Pravděpodobnost jevu A_k, že právě k pokusů ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) bude úspěšných (zdařilých) je

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

– porovnej s binomickou větou

$$(q+p)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k}\cdot p^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Pokud

B_k ... aspoň k pokusů úspěšných (zdařilých), tj. k nebo ($k + 1$) nebo ... nebo n

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-(k+1)} + \ldots + \binom{n}{n} p^n q^0$$

C_k ... nejvýše k pokusů úspěšných (zdařilých), tj. 0 nebo 1 nebo 2 nebo ... nebo k

$$P(C_k) = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} p^k q^{n-1}$$

Pokud chceme pravděpodobnost nezdařilých (neúspěšných)

$$P(N_k) = 1 - P(Z_k)$$

Příklady

② Jaká je pravděpodobnost, že rodina se 4 dětmi má $n=4$ $p_{ch}=p_d \Rightarrow p=\frac{1}{2}$ $q=\frac{1}{2}$

a) aspoň 3 chlapce A (3 nebo 4)

$$P(A_k)=\binom{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\binom{4}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^0=4\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2}+1\cdot\tfrac{1}{16}\cdot 1=\tfrac{5}{16}=0{,}3125 \; (\doteq 31\,\%)$$

b) aspoň jednoho chlapce B (1 nebo 2 nebo 3 nebo 4 ⇒ zdlouhavé ⇒ opač. (doplň.) jev B'... žádného chlapce

$$P(B_k)=1-P(B_k')=1-\binom{4}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=1-1\cdot 1\cdot\tfrac{1}{16}=\tfrac{15}{16}=0{,}9375 \; (\doteq 94\,\%)$$

c) nejvýše 2 dívky C (žádnou nebo 1 nebo 2)

$$P(C_k)=\binom{4}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\binom{4}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=1\cdot 1\cdot\tfrac{1}{16}+4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{11}{16}=0{,}6875$$

[nebo C_k' aspoň 3 (tj. 3 nebo 4) $\Rightarrow P(C_k)=1-P(C_k')=1-\left[\binom{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\binom{4}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right]=1-\tfrac{5}{16}=\tfrac{11}{16}$]

③ Předpokládáme, že pravděpodobnost, že dítě zdědí určitou chorobu, je 0,25. Jaká je pravděpodobnost,
DÚ že v rodině se 4 dětmi tuto chorobu zdědí nejvýše 1 dítě? $p=0{,}25$ $n=4$

$$P(A_k)=\binom{4}{0}\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^4+\binom{4}{1}\cdot 0{,}25^1\cdot 0{,}75^3=1\cdot 1\cdot 0{,}75^4+\underbrace{4\cdot 0{,}25}_{1}\cdot 0{,}75^3\doteq 0{,}738$$

④ Hráč košíkové promění trestný hod s pravděpodobností 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že z 10 trestných hodů promění aspoň 8? ($k=8$ nebo 9 nebo 10) $p=0{,}8$ $q=1-0{,}8=0{,}2$ $n=10$

$$P(A_k)=\binom{10}{8}0{,}8^8\cdot 0{,}2^2+\binom{10}{9}0{,}8^9\cdot 0{,}2^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}8^{10}\cdot 0{,}2^0=$$
$$=45\cdot 0{,}8^8\cdot 0{,}2^2+10\cdot 0{,}8^9\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}8^{10}\cdot 1=0{,}8^8(45\cdot 0{,}04+1{,}6+0{,}64)\doteq 0{,}678$$

⑤ Určitý lék úspěšně léčí dané onemocnění v 90 % případů. Je-li podán 10 pacientům, jaká je
DÚ pravděpodobnost, že aspoň 8 z nich bude vyléčeno? $n=10$ $p=0{,}9 \Rightarrow q=1-0{,}9=0{,}1$
aspoň 8 $k=8$ nebo 9 nebo 10

$$P(A_k)=\binom{10}{8}\cdot 0{,}9^8\cdot 0{,}1^2+\binom{10}{9}\cdot 0{,}9^9\cdot 0{,}1^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}9^{10}\cdot 0{,}1^0=\tfrac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot 0{,}9^8\cdot 0{,}01+\tfrac{10}{1}\cdot 0{,}9^9\cdot 0{,}1+$$
$$+1\cdot 0{,}9^{10}\cdot 1=0{,}45\cdot 0{,}9^8+0{,}9^9+0{,}9^{10}=0{,}9^8(0{,}45+0{,}9+0{,}81)\doteq 0{,}93$$

⑥ Test obsahuje 10 otázek, ke každé z nich a) 4 možné odpovědi, b) 3 možné odpovědi (pouze jedna správná). Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví správně aspoň na 5 otázek, jestliže látku vůbec nezná a volí odpovědi náhodně? $n=10$ a) $p=\frac{1}{4}\Rightarrow q=\frac{3}{4}$ b) $p=\frac{1}{3}\Rightarrow q=\frac{2}{3}$

a) $$P(A)=\binom{10}{5}\left(\tfrac{1}{4}\right)^5\left(\tfrac{3}{4}\right)^5+\binom{10}{6}\left(\tfrac{1}{4}\right)^6\left(\tfrac{3}{4}\right)^4+\binom{10}{7}\left(\tfrac{1}{4}\right)^7\left(\tfrac{3}{4}\right)^3+\binom{10}{8}\left(\tfrac{1}{4}\right)^8\left(\tfrac{3}{4}\right)^2+$$
$$+\binom{10}{9}\left(\tfrac{1}{4}\right)^9\left(\tfrac{3}{4}\right)^1+\binom{10}{10}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{10}\left(\tfrac{3}{4}\right)^0=252\cdot\tfrac{3^5}{4^{10}}+210\cdot\tfrac{3^4}{4^{10}}+120\cdot\tfrac{3^3}{4^{10}}+$$
$$+45\cdot\tfrac{3^2}{4^{10}}+10\cdot\tfrac{3}{4^{10}}+1\cdot\tfrac{1}{4^{10}}=\tfrac{1}{4^{10}}(252\cdot 243+210\cdot 81+120\cdot 27+45\cdot 9+10+1)\doteq 0{,}078$$

DÚ b) $$P(B)=\binom{10}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5\left(\tfrac{2}{3}\right)^5+\binom{10}{6}\left(\tfrac{1}{3}\right)^6\left(\tfrac{2}{3}\right)^4+\binom{10}{7}\left(\tfrac{1}{3}\right)^7\left(\tfrac{2}{3}\right)^3+\binom{10}{8}\left(\tfrac{1}{3}\right)^8\left(\tfrac{2}{3}\right)^2+$$
$$+\binom{10}{9}\left(\tfrac{1}{3}\right)^9\left(\tfrac{2}{3}\right)^1+\binom{10}{10}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{10}\left(\tfrac{2}{3}\right)^0=252\cdot\tfrac{2^5}{3^{10}}+210\cdot\tfrac{2^4}{3^{10}}+120\cdot\tfrac{2^3}{3^{10}}+45\cdot\tfrac{2^2}{3^{10}}+$$
$$+10\cdot\tfrac{2}{3^{10}}+1\cdot\tfrac{1}{3^{10}}=\tfrac{1}{3^{10}}(252\cdot 32+210\cdot 16+120\cdot 8+45\cdot 4+20+1)\doteq 0{,}213$$

$$\left[\binom{10}{5}=\tfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=252 \quad \binom{10}{6}=\binom{10}{4}=\tfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210 \quad \binom{10}{7}=\binom{10}{3}=\tfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120 \quad \binom{10}{8}=\tfrac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45\right]$$

⑦ Diagnostický test na určité onemocnění je pozitivní s pravděpodobností a) 0,99 b) 0,995, je-li pacient
DÚ skutečně nemocen. Testu se podrobí a) 30 b) 20 pacientů, u nichž je podezření na toto onemocnění. Připusťme, že jsou všichni skutečně nemocní. Jaká je pravděpodobnost, že nám žádné z těch 30 (20) onemocnění neunikne?

a) $P(A_k)=\binom{30}{30}\cdot 0{,}99^{30}\cdot 0{,}01^0=0{,}99^{30}\doteq 0{,}74$

b) $P(B_k)=\binom{20}{20}\cdot 0{,}995^{20}\cdot 0{,}005^0=0{,}995^{20}\doteq 0{,}905$

[kdyby pro 20 $P(A_k)=0{,}99^{20}\doteq 0{,}82$] [kdyby pro 30 $P(B_k)=0{,}995^{30}\doteq 0{,}86$]